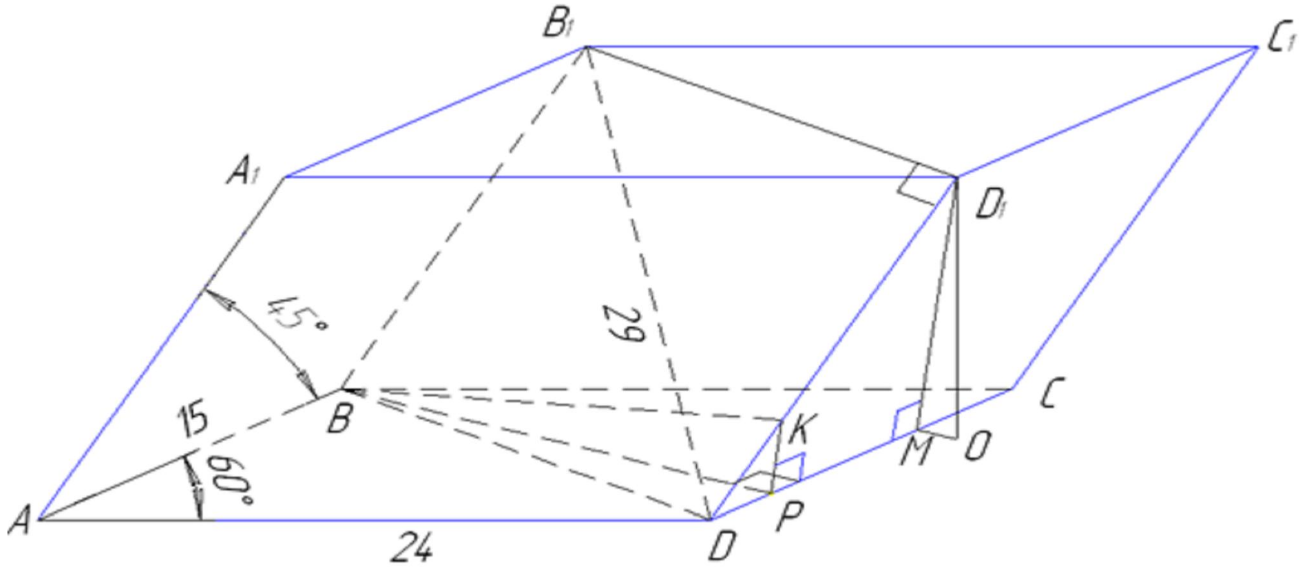
Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$
Сторона $AB = 15$ см, сторона $AD = 24$ см, $B_1D = 29$ см
угол $A_1AB = 45$ градусов
угол $BAD = 60$ градусов
B_1BDD_1 – прямоугольник.
Найти объём параллелепипеда.



Из треугольника ABD по теореме косинусов находим

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos BAD} = \sqrt{24^2 + 15^2 - 2 \cdot 24 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 21 \text{ см}$$

Из прямоугольного треугольника DBB_1 (угол $DBB_1 = 90$ градусов) по теореме Пифагора

$$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20 \text{ см}$$

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 20$ см, $DC = AB = 15$ см, $BC = AD = 24$ см,
$BCD = BAD = 60^\circ$

Площадь $ABCD = AD \cdot AB \cdot \sin BAD = 24 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 180\sqrt{3}$ см^2

В плоскости $ABCD$ проведём прямую BP перпендикулярно прямой CD. Прямая BP пересечёт прямую CD в точке P. Угол $CPB = 90$ градусов.

В плоскости DCC_1D_1 проведём прямую PK перпендикулярно прямой CD. Прямая BP пересечёт прямую DD_1 в точке K. Угол $DPK = 90$ градусов.

Прямая CD перпендикулярна пересекающимся прямым BP и PK, лежащим в плоскости BPK, следовательно, прямая CD перпендикулярна плоскости BPK. Угол BPK является углом между плоскостями $ABCD$ и DCC_1D_1.

Из прямоугольного треугольника BPC (угол $BPC = 90$ градусов)

$$BP = BC \cdot \sin BCD = 24 \cdot \sin 60° = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ см}$$

$$CP = BC \cdot \cos BCD = 24 \cdot \cos 60° = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ см}$$

$$DP = DC - CP = 15 - 12 = 3 \text{ см}$$

Из прямоугольного треугольника DPK (угол $DPK = 90°$, угол $KDP =$ угол $A_1AB = 45°$)

$$KP = DP \cdot tg(KDP) = 3 \cdot tg(45°) = 3 \cdot 1 = 3 \text{ см}$$

$$DK = \frac{DP}{\cos KDP} = \frac{3}{\cos 45°} = 3\sqrt{2} \text{ см}$$

Из прямоугольного треугольника BDK (угол $BDK = 90°$) по теореме Пифагора:

$$BK = \sqrt{BD^2 + DK^2} = \sqrt{21^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{459} \text{ см}$$

В треугольнике BPK $BK = \sqrt{459}$ см, $BP = 12\sqrt{3}$ см, $KP = 3$ см

По теореме косинусов $BK^2 = BP^2 + KP^2 - 2 \cdot BP \cdot KP \cdot \cos(BPK)$

$$\cos(BPK) = \frac{BP^2 + KP^2 - BK^2}{2 \cdot BP \cdot KP} = \frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - \left(\sqrt{459}\right)^2}{2 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{432 + 9 - 459}{72\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

В плоскости DCC_1D_1 проведём прямую D_1M перпендикулярно прямой CD. Прямая D_1M пересечёт прямую CD в точке M. Угол $DMD_1 = 90$ градусов.

Из прямоугольного треугольника DMD_1 (Угол $DMD_1 = 90°$, угол $D_1DM = 45°$)

$$D_1M = DD_1 \cdot \sin(D_1DM) = 20 \cdot \sin(45°) = 10\sqrt{2} \text{ см}$$

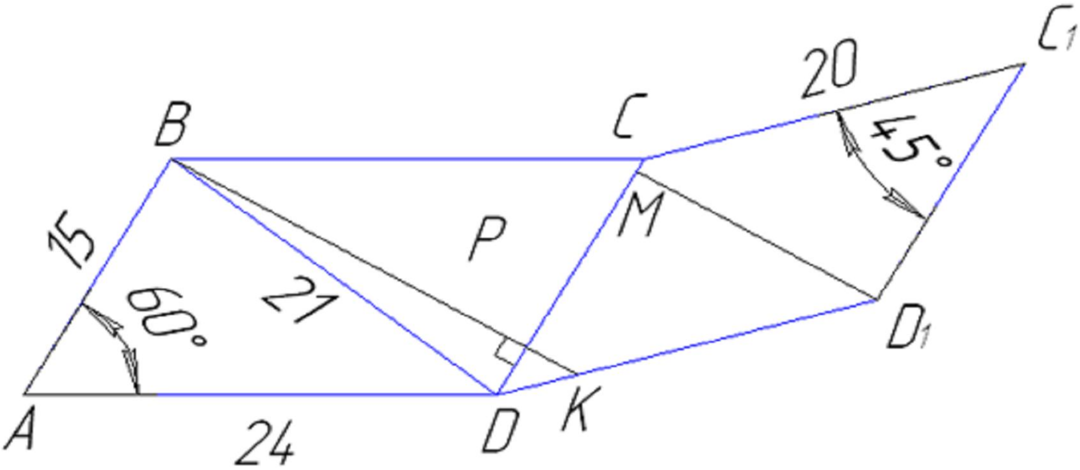
Проведём прямую D_1O перпендикулярно плоскости $ABCD$. прямая D_1O пересечёт плоскость $ABCD$ в точке O. Отрезок $[D_1O]$ является высотой параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$$\sin(OMD_1) = \sin(180 - BPK) = \sin(BPK) = \sqrt{1 - (\cos(BPK))^2} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{141}}{12}$$

Из прямоугольного треугольника OMD_1 (угол $OMD_1 = 90°$)

$$h = D_1O = D_1M \cdot \sin(OMD_1) = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{141}}{12} = \frac{5\sqrt{282}}{6}$$

Объём $ABCDA_1B_1C_1D_1 =$ Площадь $ABCD \cdot h = 180\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{282}}{6} = 450\sqrt{94}$ см^3



B
C
C1
20
45°
15
P
M
60°
21
D1
A
24
D
K