

#### Задача 4.

Найти частное решение для указанных начальных условий.

$$y'' + y' - 12y = 24x - 14 - 7e^{-4x}; \quad y(0) = 6; \quad y'(0) = 0$$

Характеристическое уравнение  $k^2 + k - 12 = 0$  имеет корни:

$$k = \frac{-1 \pm 7}{2}; \quad k_1 = -4; \quad k_2 = 3$$

Общее решение однородного уравнения  $y'' + y' - 12y = 0$  имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$$

Найдём частное решение  $y_1$  неоднородного уравнения  $y'' + y' - 12y = -7e^{-4x}$ . Так как корень  $k = -4$  является однократным корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде

$$y_1 = A x e^{-4x}$$

Тогда

$$y_1' = A e^{-4x} - 4A x e^{-4x}$$

$$y_1'' = -4A e^{-4x} - 4A e^{-4x} + 16A x e^{-4x} = -8A e^{-4x} + 16A x e^{-4x}$$

Подставляем  $y_1''$ ;  $y_1'$ ;  $y_1$  в уравнение  $y'' + y' - 12y = -7e^{-4x}$

$$-8A e^{-4x} + 16A x e^{-4x} + A e^{-4x} - 4A x e^{-4x} - 12A x e^{-4x} = -7e^{-4x}$$

$$-7A e^{-4x} = -7e^{-4x}$$

$$A = 1$$

$$y_1 = x e^{-4x}$$

Найдём частное решение  $y_2$  неоднородного уравнения  $y'' + y' - 12y = 24x - 14$ . Так как корень  $k = 0$  не является корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде

$$y_2 = Bx + C$$

Тогда

$$y_2' = B$$

$$y_2'' = 0$$

Подставляем  $y_2''$ ;  $y_2'$ ;  $y_2$  в уравнение  $y'' + y' - 12y = 24x - 14$

$$0 + B - 12(Bx + C) = 24x - 14$$

$$\begin{cases} -12Bx = 24x \\ B - 12C = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \quad y_2 = -2x + 1$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения  $y'' + y' - 12y = 24x - 14 - 7e^{-4x}$   
равно  $y_{\text{чн}} = y_1 + y_2$

$$y_{\text{чн}} = xe^{-4x} - 2x + 1$$

Общее решение неоднородного уравнения  $y'' + y' - 12y = 24x - 14 - 7e^{-4x}$

$$y = y_o + y_{\text{чн}}$$

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x} + xe^{-4x} - 2x + 1$$

Найдём частное решение для указанных начальных условий

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 + 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 + 1 = C_1 + C_2 + 1 = 6$$

$$y' = -4C_1e^{-4x} + 3C_2e^{3x} + e^{-4x} - 4xe^{-4x} - 2$$

$$y'(0) = -4C_1e^0 + 3C_2e^0 + e^0 - 4 \cdot 0 \cdot e^0 - 2 = -4C_1 + 3C_2 + 1 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -4C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

$$y = 2e^{-4x} + 3e^{3x} + xe^{-4x} - 2x + 1$$

Ответ:

$$y = 2e^{-4x} + 3e^{3x} + xe^{-4x} - 2x + 1$$