

Задача 5

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего однородного уравнения.

$$x^2(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1 + x^2}; \quad y_1 = x$$

Перепишем уравнение в виде

$$y'' - \frac{2}{x(x^2 + 1)}y' + \frac{2}{x^2(x^2 + 1)}y = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

На основании формулы Лиувилля

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{-2}{x(x^2+1)} dx}}{x^2} dx$$

$$\frac{2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$-\int \frac{-2}{x(x^2 + 1)} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = 2 \ln|x| - \ln(x^2 + 1) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-2}{x(x^2+1)} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}}{x^2} dx = x \int \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2+1} = x \cdot \arctg(x)$$

Общее решение однородного уравнения $x^2(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ имеет вид :

$$y_0 = C_1 x + C_2 x \arctg(x)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения $x^2(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1+x^2}$ ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) x + C_2(x) x \arctg(x)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - некоторые функции.

$$y_{\text{чн}}' = C_1(x)'x + C_1(x) + C_2(x)'x \arctg(x) + C_2(x) \left(\arctg(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

Возьмём такие $C_1(x)$ и $C_2(x)$, что

$$C_1(x)'x + C_2(x)'x \operatorname{arctg}(x) = 0$$

Тогда

$$y_{\text{чн}}' = C_1(x) + C_2(x) \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}}'' &= C_1(x)' + C_2(x)' \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C_2(x) \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \right) = \\ &= C_1(x)' + C_2(x)' \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C_2(x) \left(\frac{2}{(x^2 + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

Подставим $y_{\text{чн}}$, $y_{\text{чн}}'$, $y_{\text{чн}}''$ в неоднородное уравнение $x^2(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} x^2(x^2 + 1) \left(C_1(x)' + C_2(x)' \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C_2(x) \left(\frac{2}{(x^2 + 1)^2} \right) \right) \\ - 2x \left(C_1(x) + C_2(x) \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right) \right) + 2(C_1(x)x + C_2(x)x \operatorname{arctg}(x)) \\ = \frac{2x^3}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$C_1(x)' \cdot x^2(x^2 + 1) + C_2(x)' \cdot (x^2(x^2 + 1)\operatorname{arctg}(x) + x^3) = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

$$C_1(x)' + C_2(x)' \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Получили систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1(x)'x + C_2(x)'x \operatorname{arctg}(x) = 0 \\ C_1(x)' + C_2(x)' \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2+1} \right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{cases}$$

$$C_1(x)' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \operatorname{arctg}(x) \\ \frac{2x}{(x^2+1)^2} & \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x \operatorname{arctg}(x) \\ 1 & \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{-2x^2 \operatorname{arctg}(x)}{(x^2+1)^2} \right)}{\left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)} = -\frac{2 \operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}$$

$$C_2(x)' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x \operatorname{arctg}(x) \\ 1 & \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2+1} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \right)}{\left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)} = \frac{2}{x^2+1}$$

Интегрируя, получим:

$$C_1(x) = -2 \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2 + 1} dx = -(\operatorname{arctg}(x))^2$$

$$C_2(x) = 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2 \cdot \operatorname{arctg}(x)$$

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

$$y_{\text{чн}} = \left(-(\operatorname{arctg}(x))^2\right) \cdot x + (2 \cdot \operatorname{arctg}(x)) \cdot (x \cdot \operatorname{arctg}(x)) = x \cdot (\operatorname{arctg}(x))^2$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$x^2(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{2x^3}{1 + x^2}$$

равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$y = y_o + y_{\text{чн}}$$

$$y = C_1 x + C_2 x \operatorname{arctg}(x) + x \cdot (\operatorname{arctg}(x))^2$$

Ответ:

$$y = C_1 x + C_2 x \operatorname{arctg}(x) + x \cdot (\operatorname{arctg}(x))^2, \text{ где } C_1 \text{ и } C_2 - \text{ произвольные постоянные.}$$